ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИВАНОВСКИЙ ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИКА

Иваново
2025

ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИВАНОВСКИЙ ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Слугина М.А.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИКА

Иваново
2025

Учебно-методическое пособие для самоподготовки обучающихся по учебной дисциплине Математика предназначено для обучающихся 2 курса.

Автор: **Слугина Мария Алексеевна,** преподаватель математики и информатики ЧПОУ Ивановского фармацевтического колледжа.

Рецензент: Лазарева Елена Геннадиевна, преподаватель математики ФГБОУ ВО ИПСА ГПС МЧС РФ, учитель высшей категории

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании ЦМК общеобразовательных и гуманитарных дисциплин и рекомендовано Методическим Советом Частного профессионального образовательного учреждения Ивановского фармацевтического колледжа к использованию в учебном процессе.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Пояснительная записка……...5
1. Предел функции……...7
1.1. Определение предела функции. Вычисление простейших пределов……...7
1.2. Основные свойства пределов……...7
1.3. Вычисление пределов с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$……8
1.4. Вычисление пределов с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$……11
Задания для самоподготовки……13
Ответы для самопроверки……15
2. Производная функции……...16
2.1. Определение производной функции. Таблица производных……16
2.2. Правила дифференцирования……18
2.3. Вторая, третья и так далее производная……20
Задания для самоподготовки……21
Ответы для самопроверки……23
3. Неопределённый и определённый интегралы……25
3.1. Первообразная и неопределенный интеграл……25
3.2. Свойства неопределенного интеграла……...26
3.3. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница……28
3.4. Свойства определенного интеграла……...29
Задания для самоподготовки……31
Ответы для самопроверки……33
Список литературы……35

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данное учебно-методическое пособие для самоподготовки обучающихся предназначено для студентов 2 курса по всем специальностям Ивановского фармацевтического колледжа.

Цель данного учебно-методического пособия для самоподготовки обучающихся – помочь обучающихся изучить темы: «Предел функции»; «Производная функции»; «Неопределенный и определенный интегралы» и приобрести навыки решения примеров и задач.

В начале каждой главы даётся краткое изложение теоретических сведений по рассматриваемой теме, основные понятия и формулы. Изложение теории сопровождаются решением типовых примеров, достаточно полно раскрывающих тему практического занятия. В конце каждой темы предлагаются задания для самостоятельной подготовки.

Все примеры тщательно отобраны с целью обеспечения навыков, которые необходимо приобрести студентам при самостоятельном изучении рассматриваемой главы.

Общие компетенции, осваиваемые обучающимися при изучении учебной дисциплины Математика

Код	*Интерпретация*
ОК-1	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК-2	Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности
ОК-3	Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях
ОК-4	Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде
ОК-9	Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности
ОК-11	Планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере

1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1.1. Определение предела функции. Вычисление простейших пределов

Определение:

Если при приближении аргумента x к числу a значения функции $f(x)$ приближаются к некоторому числу b, то это число b называют пределом функции $f(x)$ в точке a.

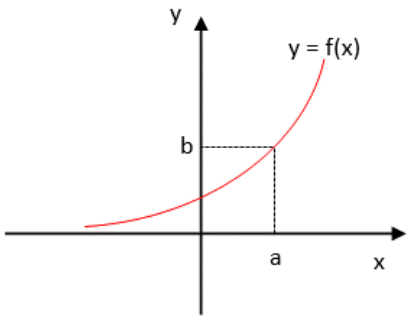


Рис. 1. График функции $f(x)$

Пусть дана функция $y = f(x)$ и точка $x = a$. Пусть значение функции в этой точке существует и равно b, тогда говорят, что существует предел функции при $x \to a$ (x стремящемся к a) и этот предел равен b (рис. 1).

Обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Метод прямой подстановки

Когда дан любой предел, где x стремится к числу, сначала необходимо попытаться подставить это число в функцию.

Пример 1. Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+4x-12}{x+4}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 12}{x + 4} = \frac{1 + 4 - 12}{1 + 4} = -\frac{7}{5}$$

1.2. Основные свойства пределов

Пусть $x \to a$ (значение a может быть любым, в том числе бесконечным), тогда:

1) $\lim\limits_{x \to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$ – константу-множитель k можно вынести за знак предела, при этом значение предела не изменится (если, конечно, предел вообще существует в данной точке);

2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$ – предел суммы равен сумме пределов (если они, разумеется, существуют). То же самое касается и разности;

3) если $f(x)=g(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$ – теорема о предельном переходе в равенстве. Если две функции принимают одинаковые значения в окрестности некоторой точки, то их пределы в этой точке совпадают;

4) если $f(x)<g(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)<\lim\limits_{x\to a}g(x)$ – теорема о предельном переходе в неравенстве. Если значения функции $f(x)$ в окрестности некоторой точки a не превосходят соответствующих значений функции $g(x)$, то предел функции $f(x)$ в этой точке a не превосходит предела функции $g(x)$;

5) $\lim\limits_{x\to a}c=c$ – предел постоянной равен самой постоянной;

6) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$ – предел произведения равен произведению пределов (если они, разумеется, существуют);

7) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ – предел частного равен частному пределов (если пределы, существуют и $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$).

1.3. Вычисление пределов с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$

Рассмотрим группу пределов, когда $x\to\infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены.

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{3x^2+4x^3}$.

Если просто подставить вместо x бесконечно большую величину, получим в числителе бесконечность и в знаменателе тоже – бесконечность. Таким образом, у нас имеется неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

В таком случае нужно использовать специальный прием решения:

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени $2\boldsymbol{x^2}-$

$3x + 5$. Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени $3x^2 + 4\boldsymbol{x^3}$. Старшая степень знаменателя равна трем.

Затем мы выбираем старшую степень x во всей дроби. В нашем случае эта степень равна трем.

Итак, метод решения следующий: для того, чтобы раскрыть неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$ нужно разделить числитель и знаменатель функции на x в старшей степени.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{3x^2 + 4x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

Разделим и числитель, и знаменатель на x^3:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x + 5}{x^3}}{\frac{3x^2 + 4x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{5}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3} + \frac{4x^3}{x^3}} =$$

Сократим получившиеся дроби:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{\frac{3}{x} + 4} =$$

Вспомним свойства пределов. Все выделенные пределы будут стремиться к 0:

$$= \frac{\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x}} - \boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^2}} + \boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^3}}}{\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x}} + \lim_{x\to\infty} 4} = \frac{0 - 0 + 0}{0 + 4} = 0$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^3+6x^2-3x-4}$

Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, поэтому решаем как и в предыдущем примере.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^3+6x^2-3x-4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{7\boldsymbol{x^3}+15x^2+9x+1}{5\boldsymbol{x^3}+6x^2-3x-4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^3}}{\frac{5x^3+6x^2-3x-4}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3}{x^3}+\frac{15x^2}{x^3}+\frac{9x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{6x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}-\frac{4}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{15}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}7+\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{x^2}+\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x}}-\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}-\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}}}=$$

$$=\frac{7+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{7}{5}=1{,}2$$

Пример 4. Вычислить предел функции $f(x)=\frac{3x^2+3x-5}{x-1}$ при $x\to\infty$.

Видим, что использована другая формулировка задания, но его надо понимать, как нахождение предела

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+3x-5}{x-1}$$

При подстановке получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Максимальная степень x в числителе 2. Максимальная степень x в знаменателе 1. Старшая степень x равна двум, значит, будем делить числитель и знаменатель на x^2, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+3x-5}{x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{3+0-0}{0-0}=\frac{3}{0}=\infty$$

Заметим, что подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

1.4. Вычисление пределов с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$

Группа следующих пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но x стремится уже не к бесконечности, а к конечному числу.

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Сначала попробуем подставить -1, получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Таким образом, у нас выявилась неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Этот прием помог лишь выявить неопределенность – на самом деле x бесконечно близко приближается к -1, но вовсе не принимает это значение! И поэтому здесь подразумевается не два нуля, а деление бесконечно малого числа на бесконечно малое число.

Общее правило: если в числителе и знаменатели находятся многочлены, и имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения.

Итак, решаем предел:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Для того, чтобы разложить числитель на множители, нужно решить соответствующее квадратное уравнение:

$$2x^2-3x-5=0$$

Сначала находим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49 = 7^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 7}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2};\ -1$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x - (-1)\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) = (x+1)(2x-5)$$

Использовали формулу $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Знаменатель в нашем примере $(x + 1)$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(2x-5)}{x+1} =$$

Сокращаем дробь на $(x + 1)$ и пробуем подставить -1 в полученную функцию.

$$= \lim_{x \to -1} (2x - 5) = 2 \cdot (-1) - 5 = -7$$

Задания для самоподготовки

Метод прямой подстановки:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-8)$
2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x^2+1)$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$
7. $\lim\limits_{x\to 0,1}\dfrac{5x+4}{1-x}$
8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$
9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$
10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{2x-6}$
11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$
12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-5x+1}{2x^2-x+1}$
13. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x+1}{x^2-x-1}$
14. $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+3x^2)$
15. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$
16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-2x+4}{(x-1)(x+1)}$
17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$
18. $\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-6x+7)$
19. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x)$
20. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{7x-5}{10+2x}$

Пределы с неопределенностью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-x^2+2}{x^3--x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x^4}{x^5+x^6}$
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x^2-x-6}{3x-x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-2x-6}{3x^3+x^2-26}$
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x+5}$
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-4x+8}{5x^3+27x^2+x}$
8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x^4-8x^2+3}{5x^4+3x^3+5}$
9. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+4x^2-1}{8x^2-6x+3}$
10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^2+2x+1}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{x^3-1}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5x-7}{3x^3+4x^2-x+2}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x-1}{2x^3+5x^2}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+8}{2x^3-x+1}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x-2}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{x^2-2}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+8x-1}{x^5+7x^3+11}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+5}{3x^3+7x+1}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x+5}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$

1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$

2. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3+x}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{x^3-27}$

7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{x^4-25}{x^2-5}$

9. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

10. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$

11. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

12. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$

13. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

14. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$

15. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$

16. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+x-4}{5x-x^2-4}$

17. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+4x+4}$

18. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

19. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$

20. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

Ответы для самопроверки

Метод прямой подстановки:

1.	-5	6.	0	11.	1	16.	$\frac{20}{3}$
2.	2	7.	5	12.	0	17.	$0{,}5$
3.	0	8.	$0{,}5$	13.	$-2{,}6$	18.	34
4.	-1	9.	-6	14.	4	19.	8
5.	∞	10.	∞	15.	8	20.	$1{,}5$

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$

1.	∞	6.	0	11.	2	16.	3
2.	0	7.	$0{,}6$	12.	$\frac{2}{3}$	17.	0
3.	-10	8.	2	13.	$2{,}5$	18.	$\frac{2}{3}$
4.	$\frac{1}{3}$	9.	∞	14.	0	19.	∞
5.	∞	10.	∞	15.	∞	20.	$\frac{2}{3}$

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$

1.	2	6.	$-\frac{1}{27}$	11.	$\frac{2}{3}$	16.	$\frac{7}{3}$
2.	3	7.	1	12.	$\frac{9}{11}$	17.	5
3.	1	8.	10	13.	2	18.	-1
4.	$1{,}5$	9.	$\frac{1}{6}$	14.	0	19.	-32
5.	-4	10.	$0{,}8$	15.	0	20.	-1

2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

2.1. Определение производной функции. Таблица производных

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Напомним, что x называется аргументом данной функции. Отметим на оси X некоторое значение аргумента x, а на оси Y – соответствующее значение функции $f(x)$ (рис. 2).

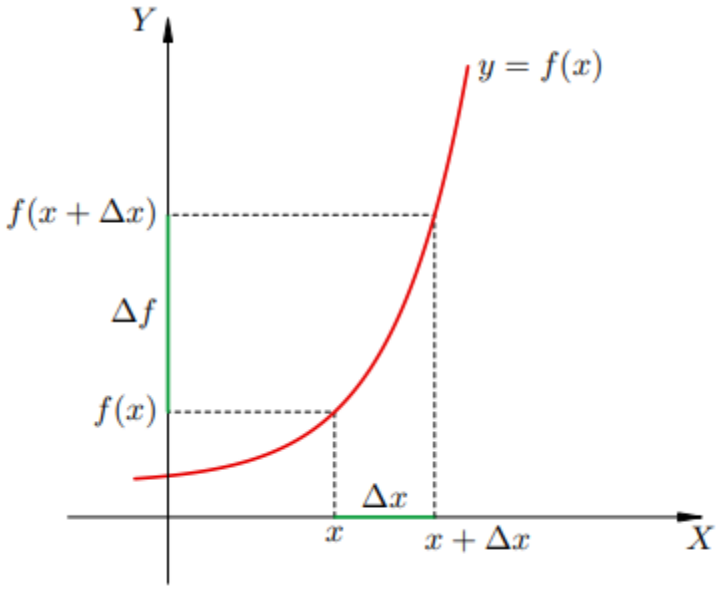


Рис. 2. График функции $f(x)$

Дадим аргументу x некоторое приращение, обозначаемое Δx. Попадём в точку $x + \Delta x$. Обозначим её на рисунке вместе с соответствующим значением функции $f(x + \Delta x)$.

Величина $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ называется приращением функции, которое отвечает данному приращению аргумента Δx.

Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Можно сказать, что производная – это мгновенная скорость изменения функции.

Таблица производных функций помогает вычислять производную, т.к. содержит уже готовые формулы к большинству видов функций (табл. 1).

В данной таблице переменной c обозначены места, где могут стоять числа, а переменной u – какое-то выражение содержащее x.

Таблица 1

Таблица производных функций

Функция $f(x)$	**Производная** $f'(x)$	**Функция** $f(u)$	**Производная** $f'(u)$
C	0	u^c	$c \cdot u^{c-1} \cdot u'$
Cx	C	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
x^c	$c \cdot x^{c-1}$	e^u	$e^u \cdot u'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	c^u	$c^u \cdot \ln c \cdot u'$
$\frac{1}{x^c}$	$-\frac{c}{x^{c+1}}$	$\frac{1}{u^c}$	$-\frac{c \cdot u'}{u^{c+1}}$
e^x	e^x	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
c^x	$c^x \cdot \ln c$	$\log_c u$	$\frac{u'}{u \cdot \ln c}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\log_c x$	$\frac{1}{x \cdot \ln c}$	$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{tg} u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$		

Пример 6. Вычислите производную $y = x^3$

$y = x^3$ – это степенная функция со степенью $c = 3$.

Используя формулу из таблицы для x^c получим:

$y' = (x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

2.2. Правила дифференцирования

Константа выносится за знак производной.

Если c – число, то $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

Пример 7.

1. $y = 5x^2$

   Можем заметить, что в таблице производных нет формулы в точности соответствующей выражению $5x^2$, но это выражение можно представить в виде числа (константы) и степенной функции, то есть $5 \cdot x^2$.

   $y' = (5 \cdot x^2)' = 5 \cdot (x^2)' = 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 10 \cdot x^1 = 10x$

2. $y = -3 \sin x$

   $y' = (-3 \cdot \sin x)' = -3 \cdot (\sin x)' = -3 \cos x$

Дифференцирование суммы.

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

Пример 8.

1. $y = \sin x + \cos x$

   Можем заметить, что в таблице производных нет формулы в точности соответствующей выражению $\sin x + \cos x$, но это выражение можно представить в виде суммы $\sin x$ и $\cos x$.

   $y' = (\sin x + \cos x)' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x$

2. $y = x^3 + 4 \cos x - 10$

   $y' = (x^3 + 4 \cos x - 10)' = (x^3)' + (4 \cos x)' - 10' = 3x^2 - 4 \sin x$

Дифференцирование произведения.

$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Пример 9.

$y = x^2 \sin x$

В этом примере наглядно видно, что $u = x^2$, а $v = \sin x$. Подставляем их в соответствии с формулой и вычисляем производную.

$y' = (x^2 \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$

Дифференцирование частного.

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Пример 10.

$y = \frac{x^2}{\sin x}$

Определяем какое выражение соответствует u и v, подставляем их в соответствии с формулой и вычисляем производную.

$$y' = \left(\frac{x^2}{\sin x}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot \sin x - x^2 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

Дифференцирование сложной функции.

$\left[u\left(v(x)\right)\right]' = u'\left(v(x)\right) \cdot v'(x)$

Для удобства дифференцирование сложных функций по этому правилу вынесено в таблицу производных (3 и 4 столбцы).

Пример 11.

1. $y = \sin \sqrt{x}$

   $y' = \left(\sin \sqrt{x}\right)' = \cos \sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

2. $y = \sqrt{\sin x}$

   $y' = \left(\sqrt{\sin x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

2.3. Вторая, третья и так далее производная

Обозначение:

y	функция
y^I	первая производная функции
y^{II}	вторая производная функции
y^{III}	третья производная функции
y^{IV}	четвертая производная функции
y^V	пятая производная функции

Чтобы найти y^{II} необходимо вычислить производную от y^I. Аналогично, чтобы вычислить y^{III} необходимо найти производную от y^{II}. То есть, чтобы посчитать производную какого-либо порядка необходимо использовать результат производной на 1 порядок ниже.

Пример 12.

$y = x^3 + 4\cos x - 10$

Находим первую производную функции используя таблицу производных, 1 и 2 правило дифференцирования.

$y^I = (x^3 + 4\cos x - 10)' = 3x^2 - 4\sin x$

Чтобы вычислить вторую производную функции, будем находить производную от результата первой производной функции и так далее.

$y^{II} = (3x^2 - 4\sin x)' = 6x - 4\cos x$

$y^{III} = (6x - 4\cos x)' = 6 + 4\sin x$

$y^{IV} = (6 + 4\sin x)' = 4\cos x$

$y^V = (4\cos x)' = -4\sin x$

$y^{VI} = (-4\sin x)' = -4\cos x$

Задания для самоподготовки

1 и 2 правила дифференцирования

1. $y = x^5 - 8x$
2. $y = x^6 - 7x$
3. $y = 7x + x^4$
4. $y = x^7 - 13x$
5. $y = -8x + x^{12}$
6. $y = 2x^8 + 8x^3 - 5$
7. $y = 6x^4 + 9x^3 - 10$
8. $y = 13x - \sqrt{x}$
9. $y = \sqrt{x} - 15x$
10. $y = \frac{1}{x} + \frac{6}{x^4} + 3$
11. $y = \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} + 9$
12. $y = -\frac{5}{x^3} - \sin x$
13. $y = \frac{4}{x^5} - \operatorname{tg} x$
14. $y = \cos x + \sqrt{x}$
15. $y = 5\sin x + \sqrt{x}$
16. $y = \operatorname{ctg} x + \sqrt{x}$
17. $y = 7^x + \ln x$
18. $y = \log_2 x - 13^x$
19. $y = \ln x - \frac{1}{x}$
20. $y = \arcsin x + \arccos x$

3 и 4 правило дифференцирования

1. $y = (x^3 - 4)(2 + x^4)$
2. $y = (x^6 + 3)(x^4 - 4)$
3. $y = \sqrt{x}(2x - 5)$
4. $y = \sqrt{x}(3 - 5x)$
5. $y = x^5 \sin x$
6. $y = x^6 \cos x$
8. $y = \left(\frac{3}{x} - 4\right)(3x + 6)$
9. $y = \left(\frac{2}{x} - 5\right)(3x + 7)$
10. $y = \left(\frac{4}{x} + 1\right)(3x + 9)$
11. $y = \frac{2x^6}{3x - 8}$
12. $y = \frac{4x^5}{2x + 5}$
13. $y = \frac{3\sqrt{x}}{x^4 - 5}$

7. $y = \left(\frac{5}{x} - 2\right)(4x + 2)$

14. $y = \frac{9\sqrt{x}}{6 + 2x^5}$

15. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{6x}$

18. $y = \frac{9 \sin x}{2 \cos x}$

16. $y = \frac{4x}{\operatorname{tg} x}$

19. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{2x^2}$

17. $y = \frac{12x^3}{5 \sin x}$

20. $y = \frac{2 \cos x}{7x}$

5 правило дифференцирования

1. $y = (5x + 6)^4$

6. $y = 3\sqrt{4x + 9}$

2. $y = (4x + 3)^5$

7. $y = 4 \cos(2x + \pi)$

3. $y = (2 - 7x^2 + 3x^3)^3$

8. $y = 2 \sin(3x + 10\pi)$

4. $y = (7 - 6x^2 + 2x)^4$

9. $y = \frac{5}{(6 - 4x)^5}$

5. $y = 2\sqrt{6x + 2}$

10. $y = \frac{3}{(8 - 5x)^6}$

Ответы для самопроверки

1 и 2 правила дифференцирования

1. $y' = 5x^4 - 8$
2. $y' = 6x^5 - 7$
3. $y' = 7 + 4x^3$
4. $y' = 7x^6 - 13$
5. $y' = -8 + 12x^{11}$
6. $y' = 16x^7 + 24x^2$
7. $y' = 24x^3 + 27x^2$
8. $y' = 13 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
9. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 15$
10. $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{24}{x^5}$
11. $y' = -\frac{10}{x^3} + \frac{1}{x^2}$
12. $y' = \frac{15}{x^4} - \cos x$
13. $y' = -\frac{20}{x^6} - \frac{1}{\cos^2 x}$
14. $y' = -\sin x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
15. $y' = 5\cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
16. $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
17. $y' = 7^x \cdot \ln 7 + \frac{1}{x}$
18. $y' = \frac{1}{x \cdot \ln 2} - 13^x \cdot \ln 13$
19. $y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$
20. $y' = 0$

3 и 4 правило дифференцирования

1. $y' = 7x^6 - 16x^3 + 6x^2$
2. $y' = 10x^9 - 24x^5 + 12x^3$
3. $y' = \frac{6x - 5}{2\sqrt{x}}$
4. $y' = -\frac{15x - 3}{2\sqrt{x}}$
5. $y' = 5x^4 \sin x + x^5 \cos x$
6. $y' = 6x^5 \cos x - x^6 \sin x$
7. $y' = -\frac{10 + 8x^2 - 10x}{x^2}$
8. $y' = -\frac{18 + 12x^2}{x^2}$
9. $y' = -\frac{14 + 15x^2}{x^2}$
10. $y' = \frac{3x^2 - 36}{x^2}$

11. $y = \dfrac{2x^6}{3x-8}$

12. $y' = \dfrac{30x^6 - 96x^5}{9x^2 - 48x + 64}$

13. $y' = -\dfrac{15 + 9x^4}{2\sqrt{x}(x^4 - 5)^2}$

17. $y' = \dfrac{36x^2 \sin x - 12x^3 \cos x}{5 \sin^2 x}$

14. $y' = \dfrac{27 - 81x^5}{\sqrt{x}(6 + 2x^5)^2}$

18. $y' = \dfrac{9}{2 \cos^2 x}$

15. $y' = -\dfrac{x + \sin x \cos x}{6x^2 \sin^2 x}$

19. $y' = \dfrac{x - 2 \sin x \cos x}{2x^3 \cos^2 x}$

16. $y' = \dfrac{4 \sin x \cos x - 4x}{\sin^2 x}$

20. $y' = -\dfrac{2x \sin x + 2 \cos x}{7x^2}$

5 правило дифференцирования

1. $y' = 20(5x + 6)^3$

6. $y' = \dfrac{6}{\sqrt{4x + 9}}$

2. $y' = 20(4x + 3)^4$

7. $y' = -8 \sin(2x + \pi)$

3. $y' = (20x^2 - 42x) \cdot \cdot (2 - 7x^2 + 3x^3)^3$

8. $y' = 6 \cos(3x + 10\pi)$

4. $y' = (8 - 48x) \cdot \cdot (7 - 6x^2 + 2x)^4$

9. $y' = \dfrac{100}{(6 - 4x)^6}$

5. $y' = \dfrac{6}{\sqrt{6x + 2}}$

10. $y' = \dfrac{90}{(8 - 5x)^7}$

3. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ И ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если $F(x)$ непрерывна на этом промежутке и дифференцируема в каждой его точке, причем $F'(x) = f(x)$.

Если функция $F(x)$ является одной из первообразной функции $f(x)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C – произвольная константа.

Совокупность всех первообразных функций для функции $y = f(x)$, называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, а C – произвольная константа.

Символ $\int$ – называется знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Вычисление неопределенного интеграла для заданной функции называется интегрированием. Обычный способ вычисления интегралов заключается в приведении интеграла к табличному виду.

Таблица 2

Таблица первообразных функций

Функция $f(x)$	**Первообразная** $F(x)$	**Функция** $f(x)$	**Первообразная** $F(x)$
k	$kx + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
x^k	$\frac{x^{k+1}}{k+1} + C \ \ (c \neq -1)$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg}\ x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{1}{x^2 + k^2}$	$\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{k}\right) + C$
k^x	$\frac{k^x}{\ln k} + C$	$\frac{1}{x^2 - k^2}$	$\frac{1}{2k}\ln\left\lvert\frac{x-k}{x+k}\right\rvert + C$

Продолжение таблицы 2

Функция $f(x)$	**Первообразная** $F(x)$	**Функция** $f(x)$	**Первообразная** $F(x)$
e^x	$e^x + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm k^2}}$	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm k^2}\right\| + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{k}\right) + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\left\|\text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
$\text{tg}\ x$	$-\ln\|\cos x\| + C$	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\|\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right\| + C$
$\text{ctg}\ x$	$\ln\|\sin x\| + C$		

3.2. Свойства неопределенного интеграла

Правила интегрирования:

1. Константу можно вынести за знак интеграла. Если k – константа, то

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x) dx$$

2. Интеграл от суммы функций равен сумме их интегралов (аналогично с разностью):

$$\int \big(f_1(x) + f_2(x)\big) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

Пример 13. Вычислите $\int (6x^2 + 8x - 5) dx$.

Используя правила интегрирования и две первые формулы из таблицы первообразных попробуем вычислить данный пример.

$$\int (6x^2 + 8x - 5) dx =$$

По 2 правилу интегрирования разделим подынтегральную функцию на отдельные небольшие интегралы.

$$= \int 6x^2 dx + \int 8x\, dx - \int 5 dx =$$

Теперь можем работать с каждым интегралом по отдельности. Вынесем константы за знак интеграла по 1 правилу интегрирования.

$$= 6 \cdot \int x^2 dx + 8 \cdot \int x\, dx - \int 5dx =$$

Применяя 1 и 2 формулы из таблицы первообразных, заменим подынтегральные функции по соответствующим формулам и упростим полученные выражения.

$$= 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + C = \frac{6 \cdot x^3}{3} + \frac{8 \cdot x^2}{2} - 5x + C = 2x^3 + 4x^2 - 5x + C$$

Замечание! Обратите внимание, что в первообразной функции +С записывается в конце только один раз.

Пример 14. Вычислите $\int \sqrt{x} dx$.

Если внимательно рассмотреть таблицу первообразных, то мы не увидим там функцию $\sqrt{x}$. И как же тогда быть? Конечно же необходимо вспомнить свойства степеней, ведь любой алгебраический корень можно представить в виде степени, а это 2 формула из таблицы первообразных.

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$$

Пример 15. Вычислите $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$.

В этом примере, с первого взгляда, кажется все хорошо. Каждую часть подынтегрального выражения можно найти в таблице первообразных. Но все портит деление, ведь в отличие от производной, в правилах интегрирования нет деления и умножения.

В таком случае необходимо произвести почленное деление, то есть выполнить обратное действие для сложения и вычитания алгебраических дробей.

$$\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx =$$

Изменяем подынтегральную функцию, выполняя почленное деление, с последующим сокращением.

$$= \int \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3} - \frac{x^3 e^x}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{5}{2}} - e^x + \frac{1}{x} \right) dx =$$

По 2 правилу интегрирования разделим подынтегральную функцию на отдельные небольшие интегралы.

$$= \int x^{-\frac{5}{2}} dx - \int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx =$$

Вычислим по отдельности каждый из полученных интегралов, используя таблицу первообразных. Не забываем в конце решения упростить полученное выражение.

$$= \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x| + C = -\frac{2}{3\sqrt{x^3}} - e^x + \ln|x| + C$$

3.3. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

При записи определенного интеграла, можно заметить, что визуально он очень похож на неопределенный интеграл.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Отличие можно увидеть в появившихся a и b – это **нижний и верхний предел интегрирования** соответственно. При вычислении определенного интеграла необходимо обращать внимание на то, чтобы нижний предел интегрирования a был **меньше**, чем верхний предел интегрирования b.

Чтобы вычислить определенный интеграл используется **формула Ньютона-Лейбница**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница дает метод вычисления определенных интегралов в случае, когда известна первообразная $F(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

В результате вычисления любого определенного интеграла получается некоторое число или числовое выражение.

Пример 16. Вычислите $\int_{-2}^{1} 4x^2 dx$.

Первым этапом решения находим первообразною для подынтегральной функции, почти как при вычислении неопределенного интеграла. Затем придерживаясь оформления формулы Ньютона-Лейбница составляем разницу для полученной первообразной и вычисляем результат до конца.

$$\int_{-2}^{1} 4x^2 dx = \frac{4x^3}{3}|_{-2}^{1} = \frac{4 \cdot 1^3}{3} - \frac{4 \cdot (-2)^3}{3} = \frac{4}{3} - \frac{-32}{3} = \frac{4+32}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

Замечание! Стоит обратить внимание, что при вычислении определенного интеграла пропадает запись $+C$.

3.4. Свойства определенного интеграла

Правила интегрирования:

1. Константу можно вынести за знак интеграла. Если k – константа, то

$$\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

2. Интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности их интегралов:

$$\int_a^b \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

3. При необходимости перестановки пределов интегрирования, знак интеграла меняется на противоположный, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Если нижний и верхний пределы интегрирования совпадают, то интеграл всегда равен 0:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Задания для самоподготовки

Первообразная функции

1. $f(x) = x^5 - 8x$
2. $f(x) = x^7 - 13x$
3. $f(x) = 2x^8 + 8x^3 - 5$
4. $f(x) = 6x^4 + 9x^3 - 10$
5. $f(x) = 13x - \sqrt{x}$
6. $f(x) = \sqrt{x} - 15x$
7. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{6}{x^4} + 3$
8. $f(x) = \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} + 9$
9. $f(x) = -\frac{5}{x^3} - \sin x$
10. $f(x) = \frac{4}{x^5} - \operatorname{tg} x$
11. $f(x) = \cos x + \sqrt{x}$
12. $f(x) = 5\sin x + \sqrt{x}$
13. $f(x) = 2x^6 - \frac{3}{\cos^2 x}$
14. $f(x) = 8x^3 - 2\sin x$
15. $f(x) = \left(\frac{5}{x} - 2\right)(4x + 2)$
16. $f(x) = (x^2 - 5)(x^4 - 3)$
17. $f(x) = (x^6 + 3)(x^4 - 4)$
18. $f(x) = (x^9 - 1)(10 + x^4)$
19. $f(x) = (x^4 + 7)(1 + x^5)$
20. $f(x) = \left(\frac{6}{x} - 7\right)(x + 2)$

Неопределенный интеграл

1. $\int (3 - x)^3 dx$
2. $\int x^2(5 - x)^2 dx$
3. $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)dx$
4. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$
5. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} dx$
6. $\int \frac{x^4 + x^{-4} + 2}{x^3} dx$
7. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x}}$
8. $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 dx$
9. $\int \frac{\sqrt[3]{x} + x^5 e^x - x^4}{x^5} dx$
10. $\int \frac{x^2 - 9}{x - 3} dx$
11. $\int (x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8x + 7)dx$
12. $\int \left(x^2 - 2x + \frac{1}{x^2}\right) dx$
13. $\int (2 - 3x)^3 dx$
14. $\int \frac{(x + 1)(x^2 + 6)}{3x^2} dx$
15. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^6} - \frac{7}{x^8}\right) dx$
16. $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 dx$

17. $\int \frac{(x-1)(x^3-1)}{x^2}dx$

18. $\int \frac{3x^4-2x^3+5x^2-7x+8}{x^2}dx$

19. $\int \left(\frac{x^4}{5}-\frac{5}{x^4}\right)dx$

20. $\int \frac{(x^2+x+1)^2}{x^3}dx$

Определенный интеграл

1. $\int_{-3}^{2}(3x^2+1)dx$

2. $\int_{-1}^{2}x^4dx$

3. $\int_{1}^{3}x^2dx$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$

6. $\int_{1}^{2}\left(\frac{4}{x}-5x^4+2\sqrt{x}\right)dx$

7. $\int_{1}^{8}\frac{x-\sqrt{x}}{x}dx$

8. $\int_{3}^{10}\frac{x^4-10x^2+5}{x^2}dx$

9. $\int_{0}^{1}\left(\sqrt{14x}+x^2\right)dx$

10. $\int_{4}^{5}\frac{x^2+13}{x^2}dx$

Ответы для самопроверки

Первообразная функции

1. $F(x)=\frac{x^6}{6}-4x^2+C$
2. $F(x)=\frac{x^8}{8}-\frac{13x^2}{2}+C$
3. $F(x)=\frac{2x^9}{9}+2x^4-5x+C$
4. $F(x)=\frac{6x^5}{5}+\frac{9x^4}{4}-10x+C$
5. $F(x)=\frac{13x^2}{2}-\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$
6. $F(x)=\frac{2x\sqrt{x}}{3}-\frac{15x^2}{2}+C$
7. $F(x)=\ln|x|-\frac{2}{x^3}+3x+C$
8. $F(x)=-\frac{5}{x}-\ln|x|+9x+C$
9. $F(x)=\frac{5}{2x^2}+\cos x+C$
10. $F(x)=-\frac{1}{x^4}+\ln|\cos x|+C$
11. $F(x)=\sin x+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$
12. $F(x)=-5\cos x+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$
13. $F(x)=\frac{2x^7}{7}-3\operatorname{tg} x+C$
14. $F(x)=2x^4+2\cos x+C$
15. $F(x)=10\ln|x|-4x^2+16x+C$
16. $F(x)=\frac{x^7}{7}-x^5-x^3+15x+C$
17. $F(x)=\frac{x^{11}}{11}-\frac{4x^7}{7}+\frac{3x^5}{5}-12x+C$
18. $F(x)=\frac{x^{14}}{14}+x^{10}-\frac{x^5}{5}-10x+C$
19. $F(x)=\frac{x^{10}}{10}+\frac{7x^6}{6}+\frac{x^5}{5}+7x+C$
20. $F(x)=12\ln|x|-\frac{7x^2}{2}-8x+C$

Неопределенный интеграл

1. $-\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{9x^2}{2}+27x+C$
2. $\frac{x^5}{5}-\frac{5x^4}{2}+\frac{25x^3}{3}+C$
3. $-\frac{3x^4}{2}+\frac{11x^3}{3}-3x^2+x+C$
4. $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|+C$
5. $\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2\sqrt{x}+C$
6. $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6x^6}+C$
7. $-\frac{2}{5x^2\sqrt{x}}+C$
8. $x-\frac{3}{x}+\frac{1}{2x^2}-3\ln|x|+C$
9. $e^x-\frac{3}{11x^3\sqrt[3]{x^2}}-\ln|x|+C$
10. $\frac{x^2}{2}+3x+C$
11. $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}-2x^3+4x^2+7x+C$
12. $\frac{x^3}{3}-x^2-\frac{1}{x}+C$
13. $-\frac{27x^4}{4}+6x^3-6x^2+8x+C$
14. $2\ln|x|+\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}-\frac{2}{x}+C$

15. $-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+C$
16. $3\ln|x|+x-\frac{3}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$
17. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-\ln|x|+C$
18. $x^3-x^2+5x-\frac{8}{x}-7\ln|x|+C$
19. $\frac{x^5}{25}+\frac{5}{3x^3}+C$
20. $3\ln|x|+\frac{x^2}{2}+2x-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$

Определенный интеграл

1. 40
2. $6{,}6$
3. $8\frac{2}{3}$
4. 1
5. 1
6. $4\ln 2+\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{97}{3}$
7. $9-4\sqrt{2}$
8. $255{,}5$
9. $\frac{2\sqrt{14}+1}{3}$
10. $14{,}4$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаренко, В.М. Элементы высшей математики. (СПО). Учебник. / В.М. Гончаренко, Л.В. Липагина, А.А. Рылов. — М.: КноРус, 2024. — 368 с.;

2. Виноградов, И.М. Элементы высшей математики. – М.: Высш. шк., 2023. – 511 с.;

3. Карп, А.П. Математика. Базовый уровень. Электронная форма учебного пособия для СПО. В 2 частях. / А.П. Карп, А.Л. Вернер. — М.: Просвещение, 2024. — 368 с.;

4. Баврин, И.И., Математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования — 2-е изд., перераб. и доп. — М: Юрайт, 2025. — 568 с.;

5. Туганбаев, А.А. Основы высшей математики: учебник для СПО / 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2024. – Ч. 1. – 312 с.;

6. Пехлецкий, И.Д. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2022. – 320 с.;

7. Шипачев, В. С. Математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. С. Шипачев; под редакцией А. Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 447 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК